# ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
# ПО МАТЕМАТИКЕ
# ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ
# ПО КОНКУРСНЫМ ГРУППАМ ФАКТ

**Структура программы:** Программа состоит из трех разделов. Поступающие по конкурсной группе "Системный анализ и управление" сдают вступительное испытание в соответствии с разделом 1. Поступающие по конкурсным группам "Aerodynamics" и "Beam-Plasma Systems and Technologies" сдают вступительное испытание в соответствии с разделом 2 программы, поступающие по остальным конкурсным группам - в соответствии с разделом 3.

**Раздел 1**

Билет включает в себя 2 вопроса. На подготовку отводится 1 час, при этом допускается использование литературы, кроме электронных носителей. Использование средств связи и доступа в Интернет не допускаются. Абитуриент отвечает на билет в форме устного собеседования, в ходе которого могут быть заданы дополнительные вопросы по соответствующему разделу программы.

1. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций Ролля, Лагранжа и Коши.
2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
3. Исследование функции одного переменного с помощью производных: монотонность, экстремумы, выпуклость, перегибы.
4. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия дифференцируемости.
5. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия, достаточные условия.
6. Условный экстремум функций нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа (необходимые условия экстремума).
7. Определённый интеграл. Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сравнения.
9. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.
10. Степенные ряды. Радиус сходимости. Ряд Тейлора.
11. Криволинейные интегралы. Формула Грина.
12. Поверхностные интегралы. Формула Остроградского-Гаусса.
13. Тригонометрический ряд Фурье. Условия сходимости ряда Фурье в точке.
14. Различные способы задания прямой и плоскости. Углы между прямыми и плоскостями. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости.
15. Кривые второго порядка. Эллипс, парабола, гипербола и их свойства.
16. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Теорема Кронекера- Капелли. Общее решение системы.
17. Линейное преобразование конечномерного пространства, его матрица. Собственные векторы и собственные значения, их свойства.
18. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.
19. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Методы их решения.
20. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных. Определитель Вронского, формула Лиувилля-Остроградского.
21. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

22. Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
23. Случайная величина и её функция распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.
24. Испытания Бернулли. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.
25. Регулярные функции комплексного переменного. Интегральная формула Коши. Функции, регулярные в кольце. Ряд Лорана.
26. Вычет в изолированной особой точке. Вычисление интегралов при помощи вычетов.
27. Задача Коши для уравнения колебаний струны и одномерного уравнения теплопроводности. Формулы Даламбера и Пуассона.
28. Задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона (двумерный и трёхмерный случаи).

**Рекомендованная литература**

1. Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
2. С. М. Никольский. Курс математического анализа.
3. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа.
4. Г. Н. Яковлев. Лекции по математическому анализу.
5. Г. Е. Иванов. Лекции по математическому анализу.
6. А. Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
7. В. И. Чехлов. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре.
8. Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
9. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
10. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
11. М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
12. В. К. Захаров, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, Теория вероятностей.
13. В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей.
14. Е. С. Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного.
15. М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. Теория функций комплексного переменного.
16. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики.
17. В. П. Михайлов. Лекции по уравнениям математической физики.
18. В. М. Уроев. Уравнения математической физики.

**Раздел 2**
**Форма:** устная с письменным заданием.
**Продолжительность:** 1 час.
**Правила экзамена:** при подготовке письменного задания разрешается использовать печатные учебники, статьи, печатные и электронные справочники. Во время устного ответа все источники, кроме собственноручно написанных, запрещены. Все интерактивные источники строго запрещены, включая поисковые системы, чаты и другие.

**А. Теоретические вопросы.**
Пожалуйста опишите и объясните:

1. Геометрия. Как найти площадь фигур в общем виде? Приведите примеры для треугольника, круга, трапеции.
2. Теорема косинусов. Объясните и приведите примеры использования.
3. Тригонометрия. Объясните тригонометрические функции: sin, cos, tg. Опишите известные отношения между ними. Приведите примеры расчета.
4. Объясните обратные тригонометрические функции: arcsin, arccos, arctg. Приведите примеры расчета.
5. Что такое линейное матрично-векторное уравнение, как решаются матрично-векторные уравнения? Опишите известные прямые и итерационные методы решения матрично-векторных уравнений.
6. Что такое матричные операции? Объясните, как считаются матричные умножения, возведение матрицы в степень, обратная матрица, что такое единичная матрица и др.
7. Что такое производная? Как найти производные в аналитическом виде (примеры). Какнайти производные вычислительным способом.
8. Цепное правило для нахождения производных. Объясните и приведите примеры.
9. Что такое интеграл? Как найти интегралы аналитическим способом (примеры). Какнайти интегралы вычислительным способом.
10. Что такое комплексное число? Мнимая единица? Объясните операции с комплекснымичислами, сложение, умножение, комплексное сопряжение и др.
11. Что такое оптимизация? Объясните, как найти оптимум функции, приведите примерыметодов.
12. Метод градиентного спуска, объясните, как он работает.
13. Что такое вероятность? Приведите примеры функций распределения вероятностей.
14. Как вычислительно оценить вероятность? Приведите примеры.

**Письменное задание.**
Объясните свое решение пошагово.

$$z = \ln xy + \sin\frac{y}{x}$$

15. Найти частные производные функции
16. Взять интеграл $\int \cos^2 x\,dx$
17. Найти дифференциал функци[illegible]t)
18. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

19. Поверните вектор $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ на 45 градусов.

20. Вычислить максимум функции $y(x) = 5 - x^2 + 3x$

**Рекомендованная литература**


1. M. P. Deisenroth, A. A. Faisal, C. S. Ong, Mathematics for Machine Learning \\ To be published by Cambridge University Press. 2020, Available at https://mml-book.github.io/
2. G. Strang. Calculus \\ MA: Wellesley College (1991). Available at https://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/


## Раздел 3

Вступительное испытание состоит из письменной части (длительность - 2 часа) и собеседования (ориентировочно через два часа после окончания письменной части). Итоговая оценка по предмету ставится по результатам обеих частей испытания.

**Теоретические вопросы.**

1. Предел числовой последовательности и его свойства. Критерий Коши. Частичный предел, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
2. Предел в точке функции одной переменной и его свойства. Эквивалентность двух определений предела по Коши и Гейне. Критерий Коши.
3. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывной функции на отрезке: теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.
4. Производная в точке функции одной переменной и её свойства. Производная суперпозиции функций. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал функции. Дифференцирование обратной функции.
5. Производные высших порядков функции одной переменной. Формула Лейбница.
6. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.
7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
8. Исследование функции одной переменной с помощью производных: монотонность,экстремумы, выпуклость, перегибы.
9. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимые условия идостаточные условия дифференцируемости.
10. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.
11. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума.
12. Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа,необходимые и достаточные условия условного экстремума.
13. Определённый интеграл. Критерий Дарбу интегрируемости функции. Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона- Лейбница.
14. Несобственный интеграл. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши, признаки сравнения и признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.

15. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши, признаки сравнения, интегральный признак, признаки Лейбница и Дирихле сходимости числовых рядов.
16. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости.
17. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
18. Криволинейные интегралы. Формула Грина.
19. Поверхностные интегралы. Формула Остроградского-Гаусса и формула Стокса.
20. Теорема Римана об осцилляции. Тригонометрический ряд Фурье. Условия сходимостиряда Фурье в точке. Условия равномерной сходимости ряда Фурье.
21. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
22. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Полные системы в нормированных пространствах.
23. Различные способы задания прямой и плоскости. Углы между прямыми и плоскостями. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости. Расстояние междускрещивающимися прямыми.
24. Кривые второго порядка. Эллипс, парабола, гипербола и их свойства.
25. Аффинное преобразование плоскости и его свойства. Главные направления аффинного преобразования. Геометрический смысл знака и модуля определителя матрицы аффинного преобразования.
26. Ортогональное преобразование плоскости и его свойства. Представление аффинного преобразования суперпозицией ортогонального преобразования и двух сжатий.
27. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Теорема Кронекера- Капелли. Теорема Фредгольма. Общее решение линейной алгебраической системы уравнений.
28. Линейное преобразование конечномерного пространства, его матрица. Формула изменения матрицы линейного преобразования при замене базиса. Собственные векторы и собственные значения, их свойства.
29. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.
30. Конечномерные евклидовы пространства. Матрица Грама. Сопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства и его свойства.
31. Самосопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства,свойства его собственных значений и собственных векторов.
32. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Метод разделения переменных. Методы понижения порядка уравнения, метод введения параметра.
33. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений с постоянными коэффициентами. Методы их решения.
34. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных.
35. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Необходимое условие слабого локального экстремума.
36. Положение равновесия автономной системы дифференциальных уравнений. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия.
37. Первые интегралы автономной системы дифференциальных уравнений. Теорема о числе независимых первых интегралов. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных, общее решение и задача Коши.
38. Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула

Байеса.
39. Случайная величина и её функция распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.
40. Испытания Бернулли. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.
41. Регулярные функции комплексного переменного. Интегральная формула Коши.Функции, регулярные в кольце. Ряд Лорана.
42. Вычет в изолированной особой точке. Вычисление интегралов при помощи вычетов.Лемма Жордана.
43. Регулярные ветви многозначных комплексных функций и Ln(z) и их применениедля вычисления интегралов.
44. Конформные отображения. Дробно-линейное отображение и его свойства. ФункцияЖуковского и её свойства.
45. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка двух переменных, гиперболических в заданной области. Метод характеристик поиска общего решения и решения задачи Коши.
46. Задача Коши для уравнения колебаний струны и одномерного уравнения теплопроводности. Формулы Даламбера и Пуассона.
47. Смешанная задача для уравнения колебаний полубесконечной струны. Условия согласования начальных и граничных условий.
48. Задача Коши для волнового уравнения в трёхмерном пространстве. Формула Кирхгофа.
49. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона для круга и шара.
50. Метод Фурье решения смешанной начально-краевой задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.
51. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным интегральным ядром.

**Рекомендованная литература**


1. Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
2. С. М. Никольский. Курс математического анализа.
3. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа.
4. Г. Н. Яковлев. Лекции по математическому анализу.
5. Г. Е. Иванов. Лекции по математическому анализу.
6. О. В. Бесов. Лекции по математическому анализу.
7. А. Ю. Петрович. Лекции по математическому анализу.
8. А. Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
9. В. И. Чехлов. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре.
10. Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
11. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
12. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
13. М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
14. В. К. Захаров, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, Теория вероятностей.
15. В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей.
16. Е. С. Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного.
17. М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. Теория функций комплексного переменного.
18. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики.
19. В. П. Михайлов. Лекции по уравнениям математической физики.
20. В. М. Уроев. Уравнения математической физики.
21. М. А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики.